

Universidade de Mogi das Cruzes – UMC
Campos Villa Lobos

Cálculo Diferencial e Integral II
Parte II

Engenharia Civil

Engenharia Mecânica

Profa. Marília Rocha – marilia@umc.br 1º semestre de 2015
--

1. Primitiva ou Antiderivada

1.1. Definição

Uma função $F(x)$ é chamada uma primitiva ou antiderivada da função $f(x)$ em um intervalo I , se para todo $x \in I$, temos $F'(x) = f(x)$.

1.1.1. Exemplo

$F(x) = \frac{x^3}{3}$ é uma primitiva da função $f(x) = x^2$.

Verificação:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow F'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2. \text{ Portanto, } F'(x) = f(x)$$

Ressaltamos que quando não for explicitado o intervalo, subentende-se que a primitiva e a função estão num mesmo intervalo I .

1.2. Definição

Se $F(x)$ e $G(x)$ são primitivas de $f(x)$ no intervalo I , então existe uma constante c tal que $F(x) - G(x) = c$ para todo $x \in I$.

1.2.1. Exemplo

As funções $G(x) = \frac{x^3}{3} + 4$ e $H(x) = \frac{1}{3}(x^3 + 3)$ também são primitivas da função $f(x) = x^2$.

Verificação:

$$G(x) = \frac{x^3}{3} + 4 \Rightarrow G'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2. \text{ Portanto, } G'(x) = f(x)$$

$$H(x) = \frac{1}{3}(x^3 + 3) = \frac{x^3}{3} + 1 \Rightarrow H'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2. \text{ Portanto, } H'(x) = f(x)$$

Notamos que, se c é uma constante arbitrária, então $F(x) = \frac{x^3}{3} + c$ é uma primitiva de $f(x) = x^2$. Assim, há uma família de primitivas de $f(x) = x^2$ da forma $F(x) = \frac{x^3}{3} + c$.

$$G(x) - H(x) = c$$

$$\left(\frac{x^3}{3} + 4\right) - \left(\frac{x^3}{3} + 1\right) = c$$

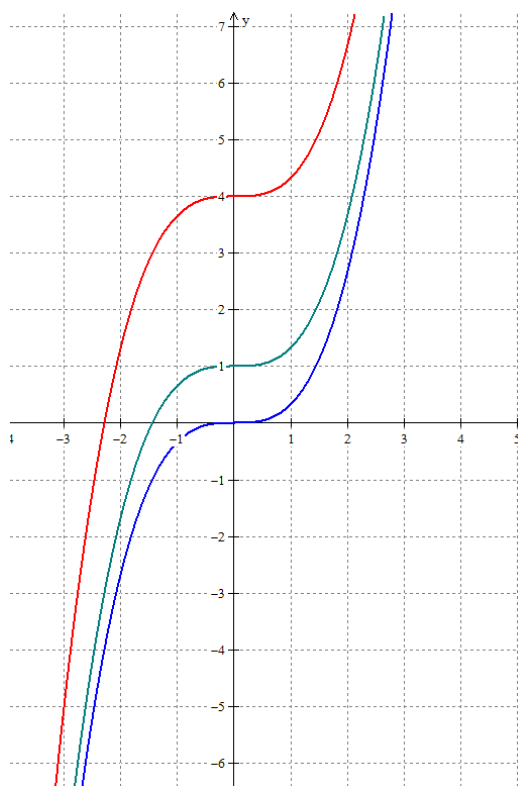
$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{3} + 4 - 1 = c$$

$$c = 3$$

Apesar da existência de infinitas primitivas para a função $f(x)$, ao encontrar uma, encontramos todas.

1.3. Interpretação Geométrica

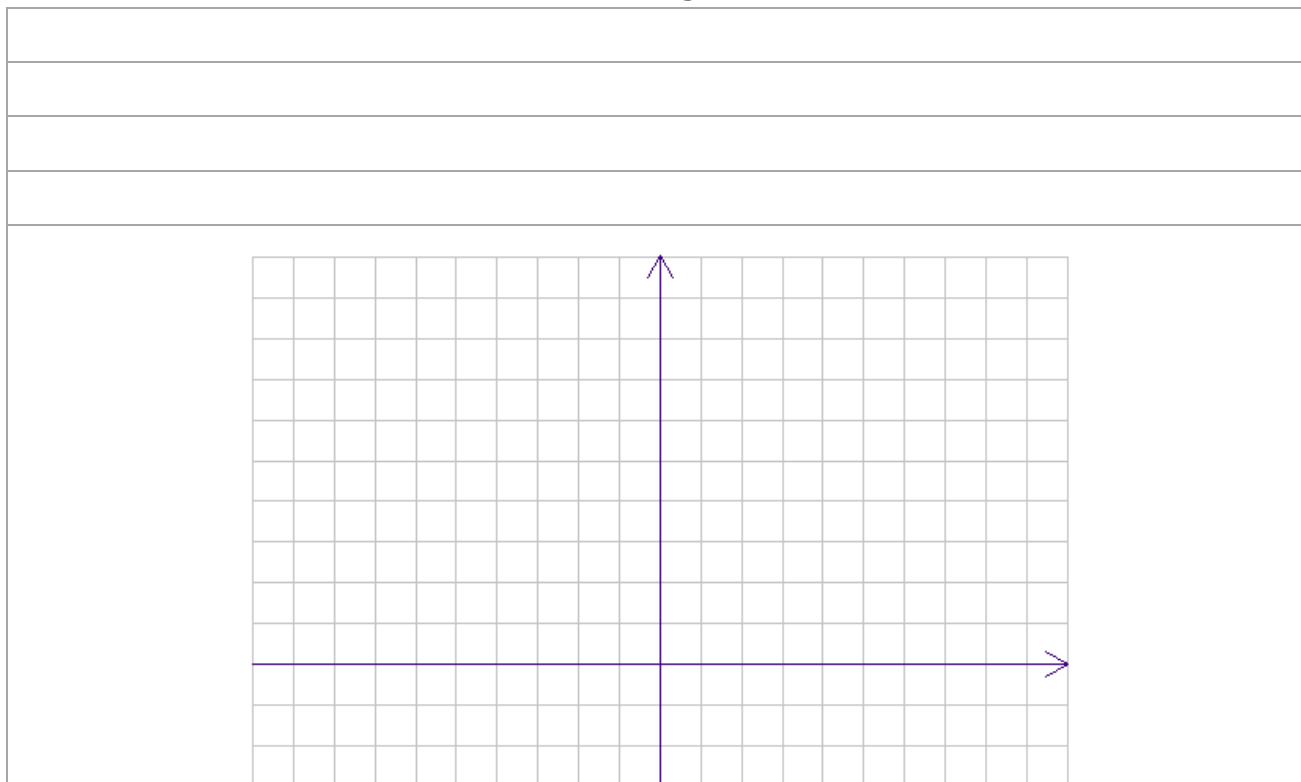
Os gráficos das primitivas $G(x)$, $H(x)$, etc, são paralelos ao gráfico da primitiva $F(x)$.



1.4. Exercícios

1. Verifique se $F(x)$, $G(x)$ e $H(x)$ são primitivas de $f(x)$ no intervalo I . Faça os gráficos das primitivas.

1.1. Dados $F(x) = x^2$, $G(x) = x^2 + 2$, $H(x) = x^2 - \frac{5}{3}$ e $f(x) = 2x$.



1.2. Dados $F(x) = 2x$, $G(x) = 2x + 2$, $H(x) = 2x - 1$ e $f(x) = 2$.



2. Determine as primitivas das funções dadas:

2.1. $f(x) = \sqrt{x}$

2.2. $f(x) = x^{-3}$

2.3. $f(x) = x^{\frac{-2}{5}}$

2.4. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

2.5. $f(x) = x^3 - 2x + 7$

2.6. $f(x) = \sin x + 3\cos x$

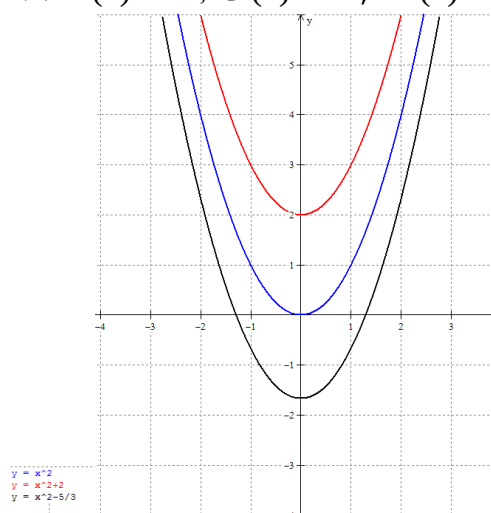
$$2.7. f(x) = \frac{x^3 + 1}{7}$$

$$2.8. f(x) = -x^5 + 3$$

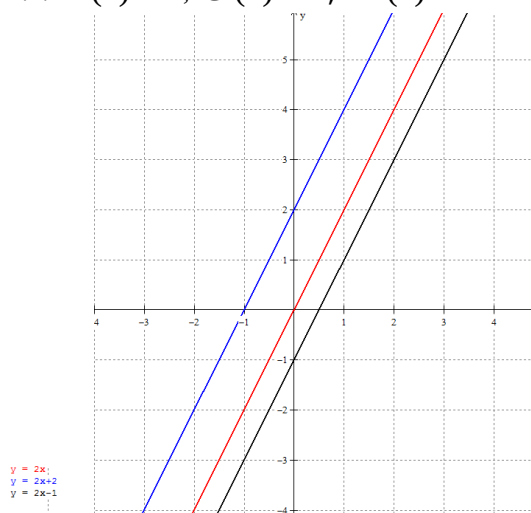
$$2.9. f(x) = \frac{x^7}{3} + \frac{x^3}{7}$$

Respostas:

$$1.1. F'(x) = 2x, G'(x) = 2x, H'(x) = 2x$$



$$1.2. F'(x) = 2, G'(x) = 2, H'(x) = 2$$



$$2.1. F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$2.4. F(x) = \arctg x + c$$

$$2.7. F(x) = \frac{x^4}{28} + \frac{x}{7} + c$$

$$2.2. F(x) = -\frac{1}{2x^2} + c$$

$$2.5. F(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + 7x + c$$

$$2.8. F(x) = -\frac{x^6}{6} + 3x + c$$

$$2.3. F(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{3}{5}} + c$$

$$2.6. F(x) = -\cos x + 3\sin x + c$$

$$2.9. F(x) = \frac{x^8}{24} + \frac{x^4}{28} + c$$

2. Integral Indefinida

2.1. Definição

Se $F(x)$ é uma primitiva da função $f(x)$ no intervalo I , a expressão $F(x)+c$ é chamada integral indefinida da função $f(x)$ e é denotada por $\int f(x).dx = F(x)+c$, em que:

$\int$: sinal de integração

$f(x)$: função integrando

dx : identifica a variável de integração, nesse caso x

$f(x).dx$: integrando

$F(x)$: primitiva de $f(x)$

c : constante de integração

A integração é um processo que permite achar a integral indefinida de uma função. É indefinida porque $\int f(x).dx$ representa a família de funções primitivas da função integrando (e não uma função específica).

2.2. Consequência da Definição

$$\int f(x).dx = F(x)+c \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

2.3. Teoremas

Sejam $f, g : I \rightarrow R$

$$T1) \int c.f(x).dx = c.\int f(x).dx, \text{ para qualquer } c \text{ constante.}$$

$$T2) \int (f(x) \pm g(x)).dx = \int f(x).dx \pm \int g(x).dx$$

$$T3) \int f'(x).dx = f(x)+c$$

$$T4) \left[\int f(x).dx \right]' = f(x)$$

2.3.1. Exemplos

T1) Dada a função $f(x) = 3x^4$ temos:

$$\int c.f(x).dx = \int 3.x^4.dx = \frac{3x^5}{5} + c$$

$$\int c \cdot f(x) \cdot dx = \int 3 \cdot x^4 \cdot dx = 3 \cdot \int x^4 \cdot dx = 3 \cdot \frac{x^5}{5} + c = \frac{3x^5}{5} + c$$

T2) Dadas as funções $f(x) = x^2 + x$ e $g(x) = x^3 - 1$ temos:

$$\int (f(x) + g(x)) \cdot dx = \int ((x^2 + x) + (x^3 - 1)) \cdot dx = \int (x^2 + x + x^3 - 1) \cdot dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - x + c$$

$$\int f(x) \cdot dx = \int (x^2 + x) \cdot dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c$$

$$\int g(x) \cdot dx = \int (x^3 - 1) \cdot dx = \frac{x^4}{4} - x + c$$

$$\int f(x) \cdot dx + \int g(x) \cdot dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - x + c$$

T3) Dada a função $f(x) = x^2$ temos:

$$f'(x) = 2x$$

$$\int f'(x) \cdot dx = \int 2x \cdot dx = 2 \cdot \int x \cdot dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + c = x^2 + c = f(x) + c$$

T4) Dada a função $f(x) = x^2$ temos:

$$\int f(x) \cdot dx = \int x^2 \cdot dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\left[\int f(x) \cdot dx \right]' = \left[\frac{x^3}{3} + c \right]' = \frac{3 \cdot x^2}{3} = x^2 = f(x)$$

2.4. Exemplos

Calcule a integral indefinida das funções:

$$1. \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$2. \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

$$3. \int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = x^{\frac{5}{3}} \cdot \frac{3}{5} + c = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c$$

$$4. \int \frac{dx}{x^5} = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-4}}{-4} + c = -\frac{1}{4x^4} + c$$

$$5. \int \cos x dx = \operatorname{sen} x + c$$

$$6. \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + c$$

2.5. Fórmulas de Integração

1.	$\int du = u + c$
2.	$\int \frac{du}{u} = \ln u + c$
3.	$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \text{ constante e } \alpha \neq -1$
4.	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$
5.	$\int e^u du = e^u + c$
6.	$\int \operatorname{sen} u du = -\cos u + c$
7.	$\int \cos u du = \operatorname{senu} + c$
8.	$\int \sec^2 u du = \operatorname{tgu} + c$
9.	$\int \operatorname{cosec}^2 u du = -\cot u + c$
10.	$\int \sec u \cdot \operatorname{tg} u du = \sec u + c$
11.	$\int \operatorname{cosec} u \cdot \cot u du = -\operatorname{cosec} u + c$
12.	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{u}{a} + c$
13.	$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + c$
14.	$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{u}{a} + c$

2.5.1. Exemplos

1. Calcule as integrais indefinidas:

1.1. $\int (5x^3 + 2 \cos x) dx$

$$\int (5x^3 + 2 \cos x) dx = 5 \int x^3 dx + 2 \int \cos x dx = 5 \left(\frac{x^4}{4} + c_1 \right) + 2 (\sin x + c_2) = \frac{5x^4}{4} + 5c_1 + 2 \sin x + 2c_2 = \frac{5x^4}{4} + 2 \sin x + c$$

Sendo $c = 5c_1 + 2c_2$

1.2. $\int (8x^3 - 6\sqrt{x} + \frac{1}{x^3}) dx$

$$\int (8x^3 - 6\sqrt{x} + \frac{1}{x^3}) dx = 8 \int x^3 dx - 6 \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{-3} dx = 8 \frac{x^4}{4} - 6 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{-2}}{-2} + c = 2x^4 - 6 \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2x^2} + c = 2x^4 - 4x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2x^2} + c$$

2.5.2. Exercícios

1. Calcule as integrais indefinidas:

1.1. $\int (x^3 - 4x^2 - 2x + 1) dx =$

1.2. $\int \sec^2 x dx =$

1.3. $\int -\frac{1}{x^2} dx =$

1.4. $\int \frac{1}{x^3} dx =$

1.5. $\int \sqrt[3]{x^2} dx =$

1.6. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$

$$1.7. \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx =$$

$$1.8. \int (3x^2 + 5 + \sqrt{x}) dx =$$

$$1.9. \int (3 \sec x \tan x + \operatorname{cosec}^2 x) dx =$$

$$1.10. \int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec} x} dx =$$

$$1.11. \int (\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{3x}) dx =$$

$$1.12. \int (\frac{x^4 + 3x^{\frac{1}{2}} + 4}{\sqrt[3]{x}}) dx =$$

$$1.13. \int (9t^2 + \frac{1}{\sqrt{t^3}}) dt =$$

$$1.14. \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}}{3} \right) dx =$$

$$1.15. \int (2x^2 + 3)^2 dx =$$

$$1.16. \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$1.17. \int \left(\sqrt{2y} - \frac{1}{\sqrt{2y}} \right) dy =$$

Respostas

$$1.1. \frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 - x^2 + x + c$$

$$1.4. -\frac{1}{2x^2} + c$$

$$1.7. \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c$$

$$1.10. \sec x + c$$

$$1.13. 3t^3 - \frac{2}{\sqrt{t}} + c$$

$$1.16. -\cot gx + c$$

$$1.2. \operatorname{tg} x + c$$

$$1.5. \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + c$$

$$1.8. x^3 + 5x + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$1.11. \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{3}\ln|x| + c$$

$$1.14. 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}} + c$$

$$1.17. \frac{2}{3}\sqrt{2y^3} - 2\sqrt{\frac{y}{2}} + c$$

$$1.3. \frac{1}{x} + c$$

$$1.6. 2\sqrt{x} + c$$

$$1.9. 3\sec x - \cot x + c$$

$$1.12. \frac{3}{14}x^{\frac{14}{3}} + 18x^{\frac{1}{6}} + 6x^{\frac{2}{3}} + c$$

$$1.15. \frac{4}{5}x^5 + 4x^3 + 9x + c$$

3. Técnicas de Integração

3.1. Integração por Substituição

Emprega-se este método quando temos uma integral em que uma parte do integrando é a derivada de outra parte, exceto por um fator constante. Tem esse nome porque depende de uma substituição de variável para simplificar o problema.

Seja $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$, portanto $F'(x) = f(x)$. Consideremos uma outra função g , derivável com imagem contida no domínio de F .

Podemos calcular a composta $f \circ g$:

$$[F(g(x))]' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Consideramos, então, $F(g(x))$ uma primitiva de $f(g(x)) \cdot g'(x)$ e escrevemos:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + c$$

Para $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$, reescrevemos a integral:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + c$$

Na prática, procurar uma função $u = g(x)$ tal que a sua derivada seja a outra parte do integrando.

3.1.1. Exemplos

1. Calcular as integrais pelo método da substituição:

$$1.1. \int (3x^2 - 1)^3 6x dx$$

$$u = 3x^2 - 1$$

$$du = 6x dx$$

$$\int (3x^2 - 1)^3 6x dx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + c = \frac{(3x^2 - 1)^4}{4} + c$$

$$1.2. \int \cos(x^2) 2x dx$$

$$u = x^2$$

$$du = 2x dx$$

$$\int \cos(x^2) 2x dx = \int \cos u du = \text{senu} + c = \text{sen}(x^2) + c$$

$$1.3. \int e^{x^2} x dx$$

$$u = x^2$$

$$du = 2x dx$$

$$\int e^{x^2} x dx = \int \frac{e^u}{2} du = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + c = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

$$1.4. \int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$u = 1 + x^2$$

$$du = 2x dx$$

$$\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \int \frac{du}{u} = \int u^{-1} du = \ln|u| + c = \ln(1+x^2) + c$$

3.1.2. Exercícios

1. Calcular as integrais pelo método da substituição:

$$1.1. \int (2x^2 + 2x - 3)^{10} (2x + 1) dx$$

$u =$	$du =$

$$1.2. \int (x^3 - 2)^{\frac{1}{7}} x^2 dx$$

$u =$	$du =$

$$1.3. \int \frac{x dx}{\sqrt[5]{x^2 - 1}}$$

$u =$	$du =$

1.4. $\int 5x\sqrt{4-3x^2} dx$

$u =$	$du =$

1.5. $\int (e^{2t} + 2)^{\frac{1}{3}} e^{2t} dt$

$u =$	$du =$

1.6. $\int \frac{e^t dt}{e^t + 4}$

$u =$	$du =$

1.7. $\int \operatorname{tg} x \sec^2 x dx$

$u =$	$du =$

1.8. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos x dx$

$u =$	$du =$

$$1.9. \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^5 x} dx$$

$u =$	$du =$

$$1.10. \int \frac{dy}{y^2 - 4y + 4}$$

$u =$	$du =$

$$1.11. \int \frac{dx}{(3x - 5)^8}$$

$u =$	$du =$

$$1.12. \int (x + \sec^2 3x) dx$$

$u =$	$du =$

1.13 $\int \frac{x}{x^2+1} dx$

$u =$	$du =$

1.14 $\int x e^{-x^2+1} dx$

$u =$	$du =$

1.15. $\int \sin^2 x \cos x dx$

$u =$	$du =$

1.16. $\int \sin (x+7) dx$

$u =$	$du =$

1.17. $\int \tan x dx$

$u =$	$du =$

1.18. $\int \frac{e^x + 2}{x^2} dx$

$u =$	$du =$

1.19. $\int 3x^2 \sqrt{x^3 - 1} dx$

$u =$	$du =$

1.20. $\int 7 \sin 7x dx$

$u =$	$du =$

1.21. $\int \cos 3x dx$

$u =$	$du =$

1.22. $\int e^{x^2} x dx$

$u =$	$du =$

1.23. $\int (x+1)^{17} dx$

$u =$	$du =$

1.24. $\int e^{\sin x} \cos x dx$

$u =$	$du =$

1.25. $\int (3x+7)^{15} 3dx$

$u =$	$du =$

1.26. $\int e^{3x} 3dx$

$u =$	$du =$

1.27. $\int 5 \cos 5x dx$

$u =$	$du =$

Respostas:

1.1. $\frac{(2x^2 + 2x - 3)^{11}}{22} + c$

1.4. $-\frac{5}{9}(4 - 3x^2)^{\frac{3}{2}} + c$

1.7. $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + c$

1.10. $-\frac{1}{y-2} + c$

1.13. $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + c$

1.16. $-\cos(x + 7) + c$

1.19. $\frac{2}{3}\sqrt{(x^3 - 1)^3} + c$

1.22. $\frac{1}{2}e^{x^2} + c$

1.25. $\frac{(3x + 7)^{16}}{16} + c$

1.2. $\frac{7}{24}(x^3 - 2)^{\frac{8}{7}} + c$

1.5. $\frac{3}{8}(e^{2t} + 2)^{\frac{4}{3}} + c$

1.8. $\frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + c$

1.11. $\frac{-1}{21(3x - 5)^7} + c$

1.14. $-\frac{1}{2}e^{-x^2 + 1} + c$

1.17. $-\ln|\cos x| + c$

1.20. $-\cos 7x + c$

1.23. $\frac{(x + 1)^{18}}{18} + c$

1.26. $e^{3x} + c$

1.3. $\frac{5}{8}(x^2 - 1)^{\frac{4}{5}} + c$

1.6. $\ln(e^t + 4) + c$

1.9. $\frac{1}{4}\sec^4 x + c$

1.12. $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x + c$

1.15. $\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + c$

1.18. $-e^{\frac{1}{x}} - \frac{2}{x} + c$

1.21. $\frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + c$

1.24. $e^{\operatorname{sen} x} + c$

1.27. $\operatorname{sen} 5x + c$

4. Anexos

4.1. Tabelas

4.1.1. Relações Trigonômétricas

01	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ - Relação Fundamental	08	$\cot gx = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$
02	$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$	09	$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$
03	$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$	10	$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$
04	$\cot^2 x + 1 = \sec^2 x$	11	$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$
05	$\sec x = \frac{1}{\cos x}$	12	$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$
06	$\cos \sec x = \frac{1}{\sin x}$	13	$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$
07	$\cot gx = \frac{\cos x}{\sin x}$		

4.1.2. Outras Relações Trigonômétricas

14	$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$	15	$\operatorname{tg}(2x) = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$
16	$\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1$	17	$\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$
18	$\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x$	19	$\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$
20	$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$	21	$\operatorname{tg}(3x) = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}$

4.1.3. Regra da Cadeia

Função Composta	Derivada
Se $y = g(x)$, $u = f(x)$, temos $y = g[f(x)]$	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

4.1.4. Integral – Definição

$\int f(x).dx = F(x) + c \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$
--

4.1.5. Integral – Propriedades

$\int c.f(x).dx = c.\int f(x).dx$
$\int (f(x) + g(x)).dx = \int f(x).dx + \int g(x).dx$

4.1.6. Técnica de Integração por partes

$$\int u dv = uv - \int v du$$

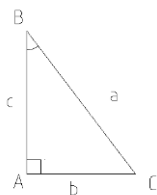
4.1.7. Derivadas e Integrais

Supondo a e α constantes e u e v funções deriváveis de x e c :

DERIVADAS		INTEGRAIS	
01	$y = c \Rightarrow y' = 0$	01	$\int du = u + c$
02	$y = x \Rightarrow y' = 1$	02	$\int \frac{du}{u} = \ln u + c$
03	$y = c.u \Rightarrow y' = c.u'$	03	$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \text{ constante e } \alpha \neq -1$
04	$y = u + v \Rightarrow y' = u' + v'$	04	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$
05	$y = u.v \Rightarrow y' = u'.v + u.v'$	05	$\int e^u du = e^u + c$
06	$y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$	06	$\int \operatorname{sen} u du = -\cos u + c$
07	$y = u^\alpha \Rightarrow y' = \alpha.u^{\alpha-1}.u', \alpha \neq 0$	07	$\int \cos u du = \operatorname{senu} + c$
08	$y = a^u \Rightarrow y' = a^u \cdot \ln a . u', \alpha > 0 \text{ e } \alpha \neq 1$	08	$\int \sec^2 u du = \operatorname{tgu} + c$
09	$y = e^u \Rightarrow y' = e^u . u'$	09	$\int \cos ec^2 u du = -\cot gu + c$
10	$y = \log_a u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u} \cdot \log_a e$	10	$\int \sec u . \operatorname{tg} u du = \sec u + c$
11	$y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$	11	$\int \cos ec u . \cot gu du = -\cos ec u + c$
12	$y = u^v \Rightarrow y' = v.u^{v-1}.u' + u^v \cdot \ln u . v', u > 0$	12	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{u}{a} + c$
13	$y = \operatorname{senu} \Rightarrow y' = \cos u . u'$	13	$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + c$
14	$y = \cos u \Rightarrow y' = -\operatorname{senu} . u'$	14	$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{u}{a} + c$
15	$y = \operatorname{tgu} \Rightarrow y' = \sec^2 u . u'$	15	$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+u}{a-u} \right + c, u^2 < a^2$
16	$y = \cot gu \Rightarrow y' = -\cos ec^2 u . u'$	16	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + c, u^2 > a^2$
17	$y = \sec u \Rightarrow y' = \sec u . \operatorname{tg} u . u'$	17	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln \left(\frac{u + \sqrt{u^2 + a^2}}{a} \right) + c$
18	$y = \cos ec u \Rightarrow y' = -\cos ec u . \cot gu . u'$	18	$\int \sqrt{u^2 + a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + c$
19	$y = \operatorname{arcsenu} \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$		
20	$y = \operatorname{arccos} u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$		
21	$y = \operatorname{arctgu} \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$		
22	$y = \operatorname{arccotgu} \Rightarrow y' = \frac{-u'}{1+u^2}$		

4.2. Trigonometria

NO TRIÂNGULO RETÂNGULO



Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\hat{\sin B} = \frac{b}{a}$$

$$\hat{tg B} = \frac{b}{c}$$

$$\hat{\cos B} = \frac{c}{a}$$

$$\hat{cotg B} = \frac{c}{b}$$

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS ESPECIAIS

	$30^\circ (\pi/6)$	$45^\circ (\pi/4)$	$60^\circ (\pi/3)$
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
Cotangente	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(x)$	0	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	0	-1	0	1
$tg(x)$	0	Não existe	0	Não existe	0

CICLO TRIGONOMÉTRICO

